文章编号: 1000-2243(2008)S0-S157-04

一类带有中立型时滞的线性切换系统的鲁棒镇定

林安辉[1], 张霄力[2]

(1. 集美大学轮机工程学院, 福建 厦门 361021; 2. 厦门大学自动化系, 福建 厦门 361005)

摘要: 研究了一类具有不确定性并带有中立型时滞的线性切换系统的鲁棒镇定问题. 该系统不仅系统状态矩阵包含有不确定性, 而且在时滞状态矩阵中包含有不确定性. 研究的主要方法是利用 Lyapunov 稳定性理论和线性矩阵不等式理论, 设计了线性有记忆状态反馈控制器和线性无记忆状态反馈控制器以及切换策略, 使得系统在一定的切换策略下经状态反馈鲁棒镇定.

关键词: 切换系统; 时滞; 线性矩阵不等式; 鲁棒镇定

中图分类号: TP273 文献标识码: A

Robust stabilization for a class of linear switched systems with uncertainties and neutral time-delays

LIN An-hui[1], ZHANG Xiao-li[2]

(1. Marine Engineering Institute, Jimei University, Xiamen, Fujian 361021, China;
2. Department of Automation, Xiamen University, Xiamen, Fujian 361005, China)

Abstract: Robust stabilization for a class of switched systems with uncertainties and neutral time-delays is considered. The systems contain uncertainties not only in the state matrices, but also in the time-delay matrices. Based on Lyapunov theory and linear matrix inequalities, the robust state-feedback memory controllers and memoryless controllers are designed respectively. With the given switching laws, the controllers can guarantee that the states of systems are robust stable.

Keywords: switched systems; time-delay; linear matrix inequalities; robust stabilization

在各类工业系统中, 时滞现象是极其普遍的. 对于中立型时滞系统控制问题的研究, 一直是一个热点问题. 切换系统是一类重要的混合系统, 它是由多个子系统以及作用在其中的切换规则构成的. 目前, 切换系统的稳定性和鲁棒镇定问题的研究取得了许多成果[1-7]. 如果切换系统中每个子系统都是中立型时滞系统, 则称这种系统为切换中立型时滞系统. 文献[8]研究了带有中立型时滞的线性切换系统的渐近稳定性问题, 但是其没有涉及到不确定性和鲁棒镇定.

本文针对一类具有不确定性并带有中立型时滞的线性切换系统的鲁棒镇定问题进行了研究. 该系统不仅在系统状态矩阵中包含有不确定性, 而且在时滞状态矩阵中包含有不确定性. 研究的主要方法是 Lyapunov 稳定性理论和线性矩阵不等式理论. 针对所给的系统, 使用单 Lyapunov 函数方法设计了线性有记忆状态反馈控制器和线性无记忆状态控制器, 使得系统在一定的切换策略下经状态反馈鲁棒镇定. 控制器的设计简单、易于实现. 最后使用仿真例子证明了结论的正确有效性.

1 问题描述

考虑以下带有中立型时滞的线性切换系统:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) - A_d\dot{x}(t-d) = (A_i + \Delta A_i)x(t) + (A_{hi} + \Delta A_{hi})x(t-h) + B_i u_i(t) \\ x_{t_0}(\theta) = x(t_0+\theta) = \varphi(\theta) \qquad (\theta \in [-\tau, 0]) \end{cases} \tag{1}$$

收稿日期: 2008-06-13

作者简介: 林安辉(1983-), 男, 助教; 通讯联系人: 张霄力(1970-), 男, 副教授.

基金项目: 福建省青年科技人才创新资助项目(2005J006); 厦门大学 985二期信息创新平台资助项目

其中: $i=1, 2, \cdots, m$; $x(t)\in R^n$ 为系统 t时刻的状态; $u_i\in R^n$ 为系统的控制输入; 常数 $h>0$, $d>0$为时间滞后量; A_i, A_{hi}, B_i分别是第 i个子系统的状态矩阵, 时滞状态矩阵和输入增益矩阵; A_d 为适当维数的常数矩阵; ΔA_i为系统的结构扰动, ΔA_{hi}为系统的时滞结构扰动.

本文采用如下记号, $\|\cdot\|$ 表示向量或矩阵的欧氏范数, $x(t)$ 简写成 x. 同时, 为了得到系统(1)鲁棒镇定的有关结论, 对于系统(1), 作如下的假设:

假设 1　系统状态矩阵的结构不确定性可分解如下形式:

$$\Delta A_i = D_i F_i(t) E_i$$

其中: D_i 与 E_i 为适当维数的常数矩阵; $F_i(t)$ 是适当维数的未知实变矩阵, 且满足

$$F_i^{\mathrm{T}}(t)F_i(t)\leqslant I \tag{2}$$

假设 2　时滞状态矩阵的结构不确定性可分解如下形式:

$$\Delta A_{hi} = D_{hi} F_{hi}(t) E_{hi}$$

其中: D_{hi} 与 E_{hi} 为适当维数的常数矩阵, $F_{hi}(t)$ 是适当维数的未知实变矩阵, 且满足

$$F_{hi}^{\mathrm{T}}(t)F_{hi}(t)\leqslant I \tag{3}$$

引理 1　设 ζ和 η为 2个相同维数的实数列向量, 则对于任意的标量 $\lambda>0$, (4)式成立.

$$2\zeta^{\mathrm{T}}\eta\leqslant\frac{1}{\lambda}\zeta^{\mathrm{T}}\zeta+\lambda\eta^{\mathrm{T}}\eta \tag{4}$$

2　主要结果

使用单 Lyapunov函数方法设计一个线性有记忆状态反馈控制器:

$$u = K_i x(t-h) \tag{5}$$

其中, K_i 为适当维数的矩阵.

定理 1　若存在正常数 α、γ、$\delta_i>0$且$\sum\limits_{i=1}^{m}\delta_i=1$、$\varepsilon_1$、$\varepsilon_2$、$\varepsilon_3$、$\varepsilon_4$, 对称正定矩阵 P、S, 使得下列线性矩阵不等式成立:

$$\sum_{i=1}^{m}\delta_i\Lambda_i<0 \tag{6}$$

其中

$$\Lambda_i=\begin{bmatrix} W_i & -A_i^{\mathrm{T}}P & PA_{hi}+\gamma PB_iB_i^{\mathrm{T}} & PD_i & PD_{hi} & 0 & 0\\ -PA_i & -\alpha I & -PA_{hi}-\gamma PB_iB_i^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & PD_i & PD_{hi}\\ A_{hi}^{\mathrm{T}}+\gamma B_iB_i^{\mathrm{T}}P & -A_{hi}^{T}-\gamma B_iB_i^{\mathrm{T}}P & (\varepsilon_2+\varepsilon_4)E_{hi}^{\mathrm{T}}E_{hi}-S & 0 & 0 & 0 & 0\\ D_i^{\mathrm{T}}P & 0 & 0 & -\varepsilon_1 I & 0 & 0 & 0\\ D_{hi}^{\mathrm{T}}P & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_2 I & 0 & 0\\ 0 & D_i^{\mathrm{T}}P & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_3 I & 0\\ 0 & D_{hi}^{\mathrm{T}}P & 0 & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_4 I \end{bmatrix} \tag{7}$$

$$W_i = PA_i + A_i^{\mathrm{T}}P + (\varepsilon_1+\varepsilon_3)E_i^{\mathrm{T}}E_i + \alpha A_d^{\mathrm{T}}A_d + S$$

则对于任意时滞 $h>0$, $d>0$, 存在切换律 $\sigma(x): [0, +\infty]\to T=\{1, 2, \cdots, m\}$使得系统(1)在控制器(7)作用下经状态反馈鲁棒镇定.

证明　系统(1)在控制器(7)作用下, 取 Lyapunov函数

$$V(x) = (x-A_d x(t-d))^{\mathrm{T}}P(x-A_d x(t-d)) + \int_{t-d}^{t}x^{\mathrm{T}}(\mu)\alpha A_d^{\mathrm{T}}A_d x(\mu)\,\mathrm{d}\mu + \int_{t-h}^{t}x^{\mathrm{T}}(\mu)Sx(\mu)\,\mathrm{d}\mu$$

通过计算并利用引理 1和式(2)、式(3), 以及 Schur补引理, 可得 $V(x)$对时间的导数, 满足:

$$\dot V(x) \leqslant \begin{bmatrix} x \\ A_d x(t-d) \\ x(t-h) \end{bmatrix}^{\mathrm T} \begin{bmatrix} W_i + \frac{1}{\varepsilon_1}PD_iD_i^{\mathrm T}P + \frac{1}{\varepsilon_2}PD_{hi}D_{hi}^{\mathrm T}P & -A_i^{\mathrm T}P & PA_{hi} + PB_iK_i \\ -PA_i & \frac{1}{\varepsilon_3}PD_iD_i^{\mathrm T}P + \frac{1}{\varepsilon_4}PD_{hi}D_{hi}^{\mathrm T}P - \alpha I & -PA_{hi} - PB_iK_i \\ (A_{hi}^{\mathrm T} + K_i^{\mathrm T}B_i^{\mathrm T})P & -A_{hi}^{\mathrm T}P - K_i^{\mathrm T}B_i^{\mathrm T}P & (\varepsilon_2 + \varepsilon_4)E_{hi}^{\mathrm T}E_{hi} - S \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ A_d x(t-d) \\ x(t-h) \end{bmatrix}$$

假设 $K_i = \gamma B_i^{\mathrm T}$, 则根据 Schur补引理可得: 若式(6)成立, 则总存在一个 i使得: $\dot V(x) < 0$

根据 Lyapunov稳定性理论, 则系统(1)经状态反馈鲁棒镇定, 其中切换策略 $\sigma(x)$取:

$$i = \arg\min\left\{ \begin{bmatrix} x \\ A_d x(t-d) \\ x(t-h) \end{bmatrix}^{\mathrm T} \begin{bmatrix} W_i + \frac{1}{\varepsilon_1}PD_iD_i^{\mathrm T}P + \frac{1}{\varepsilon_2}PD_{hi}D_{hi}^{\mathrm T}P & -A_i^{\mathrm T}P & PA_{hi} + \gamma PB_iB_i^{\mathrm T} \\ -PA_i & \frac{1}{\varepsilon_3}PD_iD_i^{\mathrm T}P + \frac{1}{\varepsilon_4}PD_{hi}D_{hi}^{\mathrm T}P - \alpha I & -PA_{hi} - \gamma PB_iB_i^{\mathrm T} \\ (A_{hi}^{\mathrm T} + \gamma B_iB_i^{\mathrm T})P & -A_{hi}^{\mathrm T}P - \gamma B_iB_i^{\mathrm T}P & (\varepsilon_2 + \varepsilon_4)E_{hi}^{\mathrm T}E_{hi} - S \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ A_d x(t-d) \\ x(t-h) \end{bmatrix} \right\}$$

定理(1)得证.

以上设计的控制器是线性有记忆状态反馈控制器. 下面同样利用单 Lyapunov函数方法设计一个线性无记忆状态反馈控制器:

$$u = K_i x(t) \tag{9}$$

其中, K_i为适当维数的矩阵.

定理 2　若存在正常数 α、γ、$\delta_i > 0$且 $\sum_{i=1}^{m}\delta_i = 1$、$\varepsilon_1$、$\varepsilon_2$、$\varepsilon_3$、$\varepsilon_4$, 对称正定矩阵 P、S, 使得下列线性矩阵不等式:

$$\sum_{i=1}^{m}\delta_i\Lambda_i < 0 \tag{10}$$

其中

$$\Lambda_i = \begin{bmatrix} W_i & -A_i^{\mathrm T}P - \gamma B_iB_i^{\mathrm T}P & PA_{hi} & PD_i & PD_{hi} & 0 & 0 \\ -PA_i - \gamma PB_iB_i^{\mathrm T} & -\alpha I & -PA_{hi} & 0 & 0 & PD_i & PD_{hi} \\ A_{hi}^{\mathrm T} & -A_{hi}^{\mathrm T} & (\varepsilon_2 + \varepsilon_4)E_{hi}^{\mathrm T}E_{hi} - S & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D_i^{\mathrm T}P & 0 & 0 & -\varepsilon_1 I & 0 & 0 & 0 \\ D_{hi}^{\mathrm T}P & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_2 I & 0 & 0 \\ 0 & D_i^{\mathrm T}P & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_3 I & 0 \\ 0 & D_{hi}^{\mathrm T}P & 0 & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_4 I \end{bmatrix} \tag{11}$$

$$W_i = PA_i + A_i^{\mathrm T}P + (\varepsilon_1 + \varepsilon_3)E_i^{\mathrm T}E_i + \alpha A_d^{\mathrm T}A_d + S$$

则对于任意时滞 $h > 0$, $d > 0$, 存在切换律 $\sigma(x)$: $[0, +\infty] \to T = \{1, 2, \cdots, m\}$, 使得系统(1)在控制器(9)作用下经状态反馈鲁棒镇定.

证明　类似于定理 1的证明, 不同的是 2个定理中, 控制器选择不一样.

3　仿真

考虑下面具有 2个子系统并带有中立型时滞的线性切换系统:

$$\dot x(t) - A_d\dot x(t-d) = (A_i + \Delta A_i)x(t) + (A_{hi} + \Delta A_{hi})x(t-h) + B_iu_i(t) \qquad (i = 1, 2)$$

其中: $A_1 = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0.5 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$; $A_{h1} = \begin{bmatrix} -0.1 & 0 \\ 0 & -0.5 \end{bmatrix}$, $A_{h2} = \begin{bmatrix} -0.5 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$; $A_d = \begin{bmatrix} -0.2 & 0.5 \\ 0.1 & 0 \end{bmatrix}$; $B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $B_2 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \end{bmatrix}$; $D_1 = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix}$, $D_2 = \begin{bmatrix} 0.3 & 0 \\ 0 & 0.3 \end{bmatrix}$; $D_{h1} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0 \\ 0 & 0.4 \end{bmatrix}$, $D_{h2} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}$; $E_1 = \begin{bmatrix} 0.6 & 0 \\ 0 & 0.6 \end{bmatrix}$, $E_2 = \begin{bmatrix} 0.3 & 0 \\ 0 & 0.3 \end{bmatrix}$; $E_{h1} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}$, $E_{h2} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0 \\ 0 & 0.4 \end{bmatrix}$; $\tau = 1$, $\gamma = 0.5$, $\varepsilon_1 = 0.5$, $\varepsilon_2 = 0.4$, $\varepsilon_3 = 0.6$, $\varepsilon_4 = 0.7$, $h = 0.4$, $d = 0.5$; $F_1(t) = F_2(t) = F_{h1}(t) = F_{h2}(t) = 0.2\begin{bmatrix} \sin(t) & 0 \\ 0 & \sin(t) \end{bmatrix}$; 设定 $\delta_1 = \delta_2 = 0.5$, 使用 MATLAB中的 LMI工具箱, 计算出:

$$P = \begin{bmatrix} 0.3027 & -0.0033 \\ -0.0033 & 0.3011 \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} 0.4369 & 0.0724 \\ 0.0724 & 0.3163 \end{bmatrix}$$

通过给定初始条件 $x_0 = [6 \; -3]^T$, x_1、x_2分别表示系统状态 x的 2个分量, 可得到如图 1所示的系统状态反馈的响应曲线.

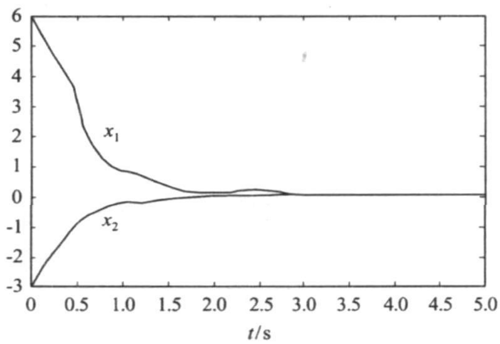

图 1　状态反馈响应曲线

Fig. 1　The respond curves of the states

4　小结

研究了一类带有中立型时滞的线性切换系统的鲁棒镇定问题. 利用凸组合、单李亚普诺夫函数, 分别设计了线性无记忆与有记忆的状态反馈控制器及其相应的切换律, 所得结果均以线性矩阵不等式形式给出. 最后通过仿真例子证明所得结论的正确有效性.

参考文献:

[1] Savkin A V, Matveev A S. Cyclic linear differential automata: a simple class of hybrid dynamical system[J]. Automatica, 2000, 36(5): 727-734.

[2] Branicky M S. Multiple Lyapunov functions and other analysis tools for switched and hybrid systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1998, 43(4): 475-482.

[3] Liberzon D, Morse A S. Basic problems in stability and design of switched systems[J]. IEEE Control Systems Magazine, 1999, 19(5): 59-70.

[4] 张霄力, 范玉顺. 一类不确定线性切换系统的鲁棒控制器设计[J]. 清华大学学报: 自然科学版, 2004, 44(1): 126-129.

[5] 罗正选, 张霄力. 一类不确定线性切换系统的鲁棒镇定[J]. 厦门大学学报: 自然科学版, 2006, 45(6): 779-783.

[6] 孙常春, 刘玉忠. 一类不确定切换系统的鲁棒状态反馈镇定[J]. 控制理论与应用, 2005, 22(5): 794-798.

[7] Zhao J, Dimirovski G M. Quadratic stability of a class of switched non-linear systems[J]. IEEE Transaction on Automatic Control, 2004, 49(4): 574-578.

[8]孙希明, 付俊, 孙洪飞, 等. 一类切换线性中立时滞系统稳定性的分析[J]. 中国电机工程学报, 2005, 25(23): 42-46.

(责任编辑: 王阿军)